

**Optimización del portafolio de inversiones mediante los modelos de Markowitz y Blac-Litterman: un enfoque integrado para la gestión de riesgos y rendimientos.**

e-ISSN: 3073-1143

León, Y.

[www.revistaaciencia.org](http://www.revistaaciencia.org)



Centro de Estudios Científicos  
y Desarrollo Académico



Recibido: 05/08/2024  
Aceptado: 06/08/2024  
Publicado: 12/09/2024



# Optimización del portafolio de inversiones mediante los modelos de Markowitz y Blac-Litterman: un enfoque integrado para la gestión de riesgos y rendimientos.

## Investment portfolio optimization using the Markowitz and Blac-Litterman models: an integrated approach to risk and return management.

Yoxana León Landín <sup>1</sup>  

Editorial CEEDA

León, Y. (2024). Optimización del portafolio de inversiones mediante los modelos de Markowitz y Blac-Litterman: un enfoque integrado para la gestión de riesgos y rendimientos. *ECiencia*, 1(5), 62-81. <https://doi.org/10.71022/7ex6vg08>

### Resumen

Este estudio combina los modelos de Markowitz y Black-Litterman para optimizar portafolios de inversión, buscando equilibrar riesgo y rendimiento bajo diferentes condiciones de mercado. Se utiliza el modelo de Black-Litterman para ajustar los retornos esperados, integrando tanto las opiniones subjetivas de los inversores como el equilibrio de mercado (CAPM). Estos retornos ajustados son luego empleados en el modelo de Markowitz para optimizar la varianza y seleccionar portafolios. Los resultados indican que esta integración mejora los índices de rendimiento ajustado al riesgo, como los ratios de Sharpe y Treynor, en comparación con portafolios optimizados por un solo modelo. Los portafolios integrados capturan eficientemente tanto las expectativas del mercado como las opiniones subjetivas, mostrando un mejor balance entre retorno y riesgo, especialmente en mercados inciertos y volátiles. La capacidad de ajustar las estimaciones de retorno y covarianza es crucial para mantener la efectividad en tiempos de crisis económicas o cambios en políticas.

**Palabras clave:** Black-Litterman; covarianza; Markowitz; optimización de cartera.

### Abstract

This study explores the integration of the Markowitz and Black-Litterman models into a unified framework for investment portfolio optimization, seeking to effectively balance risk and return under various market conditions. A methodology was used that initially adjusts the expected returns through the Black-Litterman model, using both subjective perspectives of investors and market equilibrium (CAPM). These adjusted returns feed the Markowitz model for variance optimization and portfolio selection. The results showed that the integration improves risk-adjusted return indices, such as Sharpe and Treynor ratios, compared to portfolios optimized by a single model. Integrated portfolios efficiently reflect both market expectations and subjective opinions, and exhibit a better balance between return and risk, particularly in uncertain and volatile markets. The ability to adjust return and covariance estimates is crucial to maintaining effectiveness in times of economic crises or policy changes.

**Keywords:** Black-Litterman; covariance; Markowitz; portfolio optimization.

## Introducción

La teoría moderna de portafolios, introducida por Harry Markowitz en 1952, revolucionó la gestión de inversiones al proponer el modelo de optimización de media varianza (Modelo de Markowitz), que sugiere diversificación para reducir el riesgo. A pesar de su aceptación y aplicación generalizada, el modelo de Markowitz depende intensamente de las expectativas de retorno, las cuales son notoriamente difíciles de estimar de manera precisa, dando lugar a soluciones de portafolio que pueden ser subóptimas o excesivamente sensibles a cambios en las entradas del modelo (González, 2023; Ko et al., 2024; Lamela, 2023).

Para abordar estas limitaciones, se introdujo el modelo de Black-Litterman en 1990, diseñado inicialmente para mejorar las asignaciones globales de activos en el ámbito institucional. Este modelo combina las opiniones subjetivas de los inversores (las “vistas” sobre el rendimiento esperado de los activos) con el equilibrio de mercado implícito basado en el modelo de CAPM (Capital Asset Pricing Model) (Subekti y Rosadi, 2022). De acuerdo con Murtadina et al. (2021) la integración de estas opiniones con las expectativas de equilibrio puede

Recibido: 05/08/2024

Aceptado: 06/08/2024

Publicado: 12/09/2024

[www.revistaeciencia.org](http://www.revistaeciencia.org)



conducir a recomendaciones de portafolio más robustas y adaptativas que las proporcionadas por el modelo de Markowitz por sí solo.

A pesar de las fortalezas individuales de ambos modelos, cada uno posee limitaciones que pueden ser superadas a través de una implementación integrada. Por ejemplo, mientras que el modelo de Markowitz puede ser propenso a seleccionar portafolios con concentraciones de riesgo no intencionadas debido a estimaciones erráticas de retorno, el modelo de Black-Litterman ofrece un mecanismo para moderar estas estimaciones mediante la incorporación de vistas basadas en la experiencia y el conocimiento del mercado de los inversores (González, 2023; Ko et al., 2024). Sin embargo, la formulación precisa de las vistas y la interpretación adecuada del equilibrio de mercado continúan siendo áreas complejas que requieren investigación y desarrollo metodológico continuo.

Este estudio busca explorar una metodología integrada que combine los modelos de Markowitz y Black-Litterman, con el objetivo de mejorar la gestión de riesgos y maximizar los rendimientos ajustados al riesgo en la construcción de portafolios de inversión. Las preguntas específicas que se abordan incluyen:

¿Cómo pueden integrarse los modelos de Markowitz y Black-Litterman para formar un marco de inversión cohesivo que utilice tanto información de mercado como perspectivas subjetivas de manera eficiente?

¿Qué métodos de estimación de retornos y covarianza son más efectivos al aplicar estos modelos de manera integrada, especialmente en mercados volátiles o bajo condiciones de incertidumbre significativa?

¿Cuál es el impacto de diferentes niveles de confianza en las vistas del inversor dentro del modelo de Black-Litterman sobre los rendimientos del portafolio propuesto y cómo se compara con los portafolios construidos utilizando solo el modelo de Markowitz?

¿Cómo se pueden ajustar estos modelos para acomodar nuevas condiciones de mercado y emergencias económicas, tales como crisis financieras globales o cambios abruptos en las políticas monetarias y fiscales?

Este estudio tiene como objetivo explorar una metodología integrada que fusione los modelos de Markowitz y Black-Litterman, con el fin de optimizar la gestión de riesgos y maximizar los rendimientos ajustados al riesgo en la construcción de portafolios de inversión. La importancia de esta investigación radica en su capacidad para combinar de manera efectiva las expectativas basadas en datos de mercado con las percepciones subjetivas del inversor, lo que permite una toma de decisiones más informada y estratégica en el ámbito financiero.

Para lograr este propósito, el estudio se centrará inicialmente en realizar simulaciones y análisis comparativos. Estos ensayos permitirán comparar los retornos resultantes de la aplicación del modelo integrado con aquellos derivados exclusivamente del modelo de Markowitz. El objetivo será observar las diferencias significativas en términos de rendimientos y gestión de riesgos, proporcionando evidencia empírica sobre la eficacia de la integración propuesta.

La investigación se centrará en técnicas avanzadas para estimar retornos y covarianzas, utilizando métodos como la estimación bayesiana, remuestreo y algoritmos de aprendizaje automático para mejorar la precisión en la predicción de rendimientos y correlaciones entre activos. Además, se explorará la optimización de portafolios integrando los modelos de Markowitz y Black-Litterman, combinando sus fundamentos teóricos para mejorar la gestión de riesgos y rendimientos.

### **Modelo de Optimización de Markowitz**

El modelo de Markowitz, o teoría del portafolio, formulado por Harry Markowitz en 1952, introdujo el concepto de diversificación para minimizar el riesgo. El modelo se fundamenta en la selección de una combinación de activos cuyas variaciones de rendimiento no estén perfectamente correlacionadas, permitiendo así una reducción del riesgo total del portafolio. La selección de portafolios en el contexto de Markowitz se realiza minimizando la varianza (o desviación estándar) para un retorno esperado dado, o maximizando el retorno esperado para un nivel de varianza aceptado (Camargo y Arteaga, 2022).

La “inestabilidad de la frontera eficiente” se debe considerar al aplicar el modelo de Markowitz en la construcción de portafolios. Este concepto se refiere a la sensibilidad del portafolio óptimo a pequeños cambios en las estimaciones de los retornos esperados y las matrices de covarianza de los activos. Esta alta sensibilidad puede llevar a decisiones de inversión que no sean óptimas cuando se enfrentan a nuevas informaciones o diferentes condiciones de mercado (Panchi, 2021).

De acuerdo con Reyes et al. (2023) un riesgo importante asociado con el modelo de Markowitz es la posible sobre-concentración del riesgo en un número limitado de activos. Esto ocurre porque la minimización de la varianza tiende a favorecer portafolios compuestos por activos con baja volatilidad histórica y alta correlación negativa entre sí. Sin embargo, si las estimaciones de volatilidad o correlación son incorrectas, esto puede exponer al inversor a un riesgo significativo de concentración (Chaweewanchon y Chaysiri, 2022).

Además, la imprecisión en las estimaciones de los retornos esperados y las matrices de covarianza puede llevar a una asignación subóptima de activos. Por ejemplo, una sobreestimación del retorno esperado de un activo puede resultar en una sobre locación a ese activo, aumentando el riesgo general del portafolio. Del mismo modo, una mala estimación de la covarianza puede llevar a una percepción errónea de la diversificación del portafolio (González, 2023).

El modelo de Markowitz también depende en gran medida de grandes volúmenes de datos históricos para estimar los retornos y covarianzas. Sin embargo, esto puede ser problemático ya que el futuro puede no reflejar las tendencias pasadas debido a cambios en las condiciones de mercado o económicas. Para mitigar estos problemas, se han propuesto diversas estrategias. Entre ellas se encuentran el uso de técnicas de re-muestreo y simulación Monte Carlo para generar múltiples escenarios de estimaciones, la aplicación de técnicas de regularización para limitar la sensibilidad del portafolio a estimaciones específicas y la incorporación de modelos predictivos avanzados para mejorar la precisión de las estimaciones de los parámetros (Shadabfar y Cheng, 2020).

### **Modelo de Black-Litterman**

El modelo de Black-Litterman fue creado por Fischer Black y Robert Litterman en 1990 para abordar algunas de las limitaciones de la teoría de Markowitz. Este modelo permite la incorporación de las “vistas” (expectativas subjetivas) de los inversores sobre los rendimientos futuros de los activos, ajustando los retornos esperados basados en el equilibrio del mercado. El modelo ajusta los retornos esperados ( $\pi$ ) basados en un prior del equilibrio de mercado (derivado del modelo CAPM) y las vistas específicas del inversor ( $Q$ ) (Franco et al., 2022).

La inclusión de vistas según Llano y Tovar (2020) permite a los inversores superar el problema de estimaciones poco precisas y proporciona una base más flexible y realista para la selección de portafolios. La combinación de ambos modelos busca aprovechar la robustez del marco de Black-Litterman en la incorporación de información subjetiva y el rigor matemático del modelo de Markowitz en la optimización de la varianza. La integración propone un enfoque iterativo donde las vistas del inversor se pueden ajustar y calibrar según las condiciones de mercado y los resultados de optimización previa.

Los modelos de Black-Litterman y Markowitz marca un avance notable en la gestión de portafolios. Mientras que Markowitz se enfoca en la diversificación para reducir el riesgo sin considerar la precisión de los datos de entrada, Black-Litterman introduce una forma de ajustar estos retornos esperados mediante la incorporación de las opiniones de los inversores respecto a los rendimientos futuros de los activos. Este ajuste no solo aborda la sensibilidad de Markowitz a los datos de entrada, sino que también añade un componente pragmático de realismo y flexibilidad al proceso de selección de portafolios (Franco et al., 2022; Sun et al., 2023).

El modelo de Black-Litterman modifica los retornos esperados utilizando un proceso Bayesiano para combinar las vistas subjetivas de los inversores con el prior del equilibrio de mercado, generalmente derivado del modelo CAPM. Esto proporciona estimaciones de retorno que reflejan mejor la información y las expectativas actuales, en contraste con los retornos basados únicamente en datos históricos que utiliza Markowitz (Monroy y Pérez, 2021; Mourtas y Katsikis, 2022).

La integración de vistas según López et al. (2020) reduce la dependencia del portafolio en las estimaciones de retorno y covarianza, lo que disminuye la sensibilidad a la volatilidad y los cambios en las nuevas informaciones del mercado. Además, brinda una mayor personalización y flexibilidad, permitiendo a los inversores ajustar fácilmente sus portafolios incorporando nuevas opiniones o adaptando sus expectativas en función de las condiciones del mercado.

Para implementar esta integración de manera efectiva, es esencial evaluar continuamente las vistas del mercado, ajustar cuidadosamente el parámetro de escala para equilibrar la confianza en el prior del mercado y las opiniones de los inversores, utilizar software especializado en gestión de portafolios y contar con la capacitación y consultoría de expertos en economía y finanzas cuantitativas. Esto asegurará decisiones de inversión óptimas y adaptadas a las condiciones cambiantes del mercado.

## Materiales y métodos

El presente proyecto adopta el enfoque cuantitativo, siguiendo las pautas establecidas por Hernández y Mendoza (2020) para la recopilación, análisis y vinculación de datos, con el objetivo de abordar el problema planteado. La investigación se clasifica como no experimental, ya que se lleva a cabo sin intervenir ni modificar las variables.

La elección del enfoque cuantitativo se justifica por la aplicación de los modelos de media varianza de Markowitz y el modelo propuesto por Black-Litterman, utilizando datos de los activos financieros del portafolio de la Empresa V. La población total consta de 40 carteras, organizadas por empresas de origen y promediadas para calcular la rentabilidad individual sobre la inversión (Alban et al., 2020).

Además, se empleó el método descriptivo para analizar los resultados obtenidos a partir de los modelos aplicados. Según Alban et al. (2020) los estudios descriptivos se centran en la representación, registro, análisis e interpretación de un fenómeno, así como en los procesos relacionados con el mismo. Los modelos utilizados para la selección óptima del portafolio fueron: media varianza de Markowitz y el modelo de Black-Litterman.

### Modelo de Markowitz

Para llevar a cabo el análisis, se empleó la siguiente fórmula, que se compone de dos variables principales: la expectativa de rendimiento del portafolio y la medida de su variabilidad o riesgo (Villca, 2020).

$$E[R_p]: \sum_{i:1}^n W_i * E [R_i] \quad [1]$$

Donde:

$E[R_p]$ : Rentabilidad esperada del portafolio

$W_i$ : Peso de cada activo dentro del portafolio

$E[R_i]$ : Rentabilidad promedio de cada activo

Bajo las siguientes restricciones

$$\sum_{i:1}^n W_i = 100\% \text{ de los pesos} \quad [2]$$

Primera restricción del portafolio es que su suma total debe ser igual a 1, lo que garantiza la utilización del 100% de la inversión disponible.

Basándonos en la fórmula inicial y las variables utilizadas por el modelo de Markowitz, explicamos la metodología de cálculo para cada una de ellas.

Para evaluar el riesgo del portafolio, se emplea la varianza y la desviación estándar de los datos. Esto se logra a través de la siguiente expresión matemática:

$$\text{Riesgo}_p = \sqrt{\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^M A_j A_k \Lambda \sigma_{jk}} \quad [3]$$

Donde:

$A_j$ : Porcentaje de inversión en el activo “J”

$A_k$ : Porcentaje de inversión en el activo “K”

$\sigma_{JK}$ : Covarianza entre los activos J y K

La covarianza es un indicador que revela cómo se comportan las variables entre sí. Para calcularla, se utilizó la siguiente fórmula:

$$((A1,A2)=(1/(n-1))*\sum(A1_i-U1)(A2_i-U2) \quad [4]$$

Donde:

A1: Variación del precio del título 1

$A1_i$  : Variación del precio del título 2

A2: Título 2

U1: Rendimiento esperado del título 1

U2: Rendimiento esperado del título 2

El coeficiente de correlación es un indicador que muestra si dos variables tienen un comportamiento histórico igual, similar o no presentan correlación.

$$\rho = \frac{\text{Covarianza}(A1,A2)}{\text{Riesgo } A1 * \text{Riesgo } A2} \quad [5]$$

Donde:

$\rho = 1$  Indica que la correlación es perfecta y directa

$\rho = -1$  Indica que la correlación es perfecta e inversa

$\rho = 0$  Indica que las variables (títulos) no están correlacionados

### Modelo Black Litterman

Para desarrollar el modelo, se emplea la función de utilidad cuadrática, CAPM y media varianza sin restricciones, ya que logra integrar los rendimientos de equilibrio y las expectativas del sector del portafolio. En el caso del modelo Black-Litterman, la distribución a priori se basa en la estimación del exceso de rentabilidad promedio de la cartera de mercado CAPM. El cálculo del exceso de rentabilidad se realiza de la siguiente manera:

$$E(r) = r_f + \beta r_m + a \quad [6]$$

Donde:

$r_f$  = Tasa libre de Riesgo

$r_m$  = Exceso de retorno de portafolio de mercado

$\beta$  = Coeficiente de regresión calculado como

$$\beta = \rho \frac{\sigma_p}{\sigma_m} \quad [7]$$

$a$  = Términos de error (riesgo idiosincrático)

El cual se especifica como

$$B_i = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma^2_M} \quad [8]$$

Donde:

$\sigma iM$  = Covarianza de un activo frente al portafolio de mercado M.

$\sigma^2 M$  = Varianza del portafolio de mercado

Una vez establecida la asignación de mercado, Black-Litterman transforma el modelo CAPM utilizando una “optimización inversa” basada en la función de utilidad cuadrática. Esto se hace con el objetivo de obtener los retornos de equilibrio.

$$\pi = \delta \Sigma W_m \quad [9]$$

Donde:

$\delta$  = Coeficiente de aversión al riesgo implícito

$\Sigma$  = Matriz de Varianza y covarianza

$W_m$  = Asignación de mercado

Los “views” de los inversionistas se refieren a las estimaciones de exceso de rentabilidad promedio de un activo sobre otro. Es importante destacar que estas “views” deben ser completamente invertidas, lo que significa que la suma de los pesos de las “views” es cero (en el caso de “views” relativas) o es 1 (en el caso de “views” absolutas). Además, no es necesario tener “views” sobre todos los activos en el portafolio.

$$P(B|A) \sim N(P^{-1}Q[P^T\Omega^{-1}P]^{-1}) \quad [10]$$

Las dos fuentes de información obtenidas, los retornos esperados de equilibrio derivados del CAPM y las expectativas del gestor de portafolios, se combinan mediante un análisis bayesiano. Los retornos esperados de equilibrio conforman la distribución anterior (prior), la cual se ve influenciada por las expectativas, dando lugar a una distribución posterior.

Teorema de Bayes:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} \quad [11]$$

Donde  $P(B) \neq 0$ .

Aplicando Bayes a Black – Litterman (Chen y Lim, 2020), se obtiene

$$P(PE(r)|E(r)) = \frac{P(E(r)|PE(r))P(PE(R))}{P(E(r))} \quad [12]$$

Donde

$P(A|B)$ : Es la probabilidad condicional de A dado B, conocida también como la condición a posteriori.

$P(B|A)$ : Es la probabilidad condicional de B dado A.

$P(A)$ : La probabilidad de A, también conocida como probabilidad a priori.

$P(B)$ : La probabilidad de B también llamada constante normal.

Herramientas de apoyo para el trabajo Excel-Solver-Datos.

## Resultados

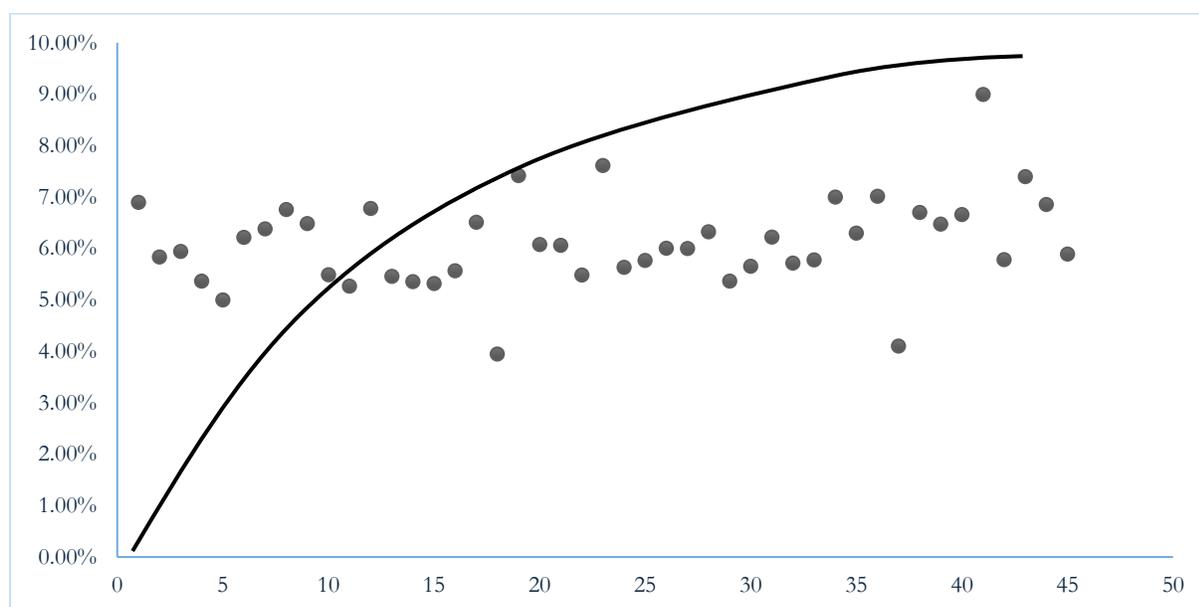
Para determinar los resultados, se establecieron los rendimientos por inversión y los riesgos asociados a estos, mediante la desviación estándar, además de la volatilidad, la sensibilidad y la ratio de Sharpe. A continuación, se muestran las fórmulas empleadas.

**Tabla 1.** Resultado estadístico del portafolio de inversión de la empresa V del periodo 2023.

Cartera	Rendimiento esperado	Varianza	Volatilidad	Covarianza	Beta	Sharpe	Treynor
C 1	6,89%	0,000001	0,10%			29,31%	
C 2	5,83%	0,000009	0,30%	-0,0000004	-0,42%	6,13%	-0,04%
C 3	5,94%	0,000357	1,89%	-0,0000001	-0,07%	1,03%	-0,29%
C 4	5,37%	0,000015	0,38%	-0,0000016	-1,66%	3,57%	-0,01%
C 5	5,00%	0,000059	0,77%	-0,0000018	-1,89%	1,29%	-0,01%
C 6	6,21%	0,000035	0,59%	-0,0000038	-3,85%	3,73%	-0,01%
C 7	6,38%	0,000014	0,37%	0,0000015	1,57%	6,40%	0,02%
C 8	6,76%	0,000017	0,41%	-0,0000020	-2,06%	6,78%	-0,01%
C 9	6,48%	0,000026	0,51%	0,0000043	4,37%	4,82%	0,01%
C 10	5,49%	0,000007	0,26%	-0,0000015	-1,50%	5,82%	-0,01%
C 11	5,27%	0,000003	0,16%	-0,0000009	-0,89%	7,88%	-0,01%
C 12	6,78%	0,000004	0,20%	0,0000002	0,23%	13,70%	0,12%
C 13	5,46%	0,000014	0,37%	-0,0000015	-1,52%	3,92%	-0,01%
C 14	5,36%	0,000008	0,29%	-0,0000010	-1,01%	4,72%	-0,01%
C 15	5,32%	0,000284	1,69%	-0,0000012	-1,27%	0,78%	-0,01%
C 16	5,56%	0,000317	1,78%	0,0000004	0,38%	0,88%	0,04%
C 17	6,51%	0,000079	0,89%	-0,0000024	-2,48%	2,83%	-0,01%
C 18	3,95%	0,000224	1,50%	-0,0000026	-2,67%	-0,03%	0,00%
C 19	7,42%	0,000015	0,39%	-0,0000001	-0,13%	8,73%	-0,26%
C 20	6,08%	0,000003	0,18%	-0,0000014	-1,43%	11,75%	-0,01%
C 21	6,06%	0,000001	0,08%	-0,0000003	-0,32%	25,33%	-0,06%
C 22	5,48%	0,000298	1,73%	-0,0000001	-0,07%	0,86%	-0,22%
C 23	7,61%	0,004374	6,61%	-0,0000316	-32,40%	1,85%	0,00%
C 24	5,63%	0,000008	0,28%	0,0000007	0,70%	5,87%	0,02%
C 25	5,76%	0,000024	0,49%	-0,0000001	-0,11%	3,59%	-0,16%
C 26	6,00%	0,000011	0,32%	-0,0000013	-1,36%	6,17%	-0,01%
C 27	6,00%	0,000009	0,29%	-0,0000016	-1,68%	6,82%	-0,01%
C 28	6,32%	0,000010	0,32%	-0,0000008	-0,78%	7,22%	-0,03%
C 29	5,36%	0,000011	0,34%	-0,0000003	-0,26%	4,02%	-0,05%
C 30	5,65%	0,000018	0,42%	-0,0000008	-0,81%	3,93%	-0,02%
C 31	6,22%	0,000001	0,10%	-0,0000001	-0,13%	22,05%	-0,18%
C 32	5,71%	0,000010	0,32%	-0,0000012	-1,21%	5,32%	-0,01%
C 33	5,78%	0,000002	0,14%	-0,0000006	-0,59%	12,91%	-0,03%

Cartera	Rendimiento esperado	Varianza	Volatilidad	Covarianza	Beta	Sharpe	Treynor
C 34	7,00%	0,000059	0,77%	0,0000019	2,00%	3,90%	0,02%
C 35	6,30%	0,000017	0,41%	-0,0000010	-1,00%	5,59%	-0,02%
C 36	7,01%	0,000061	0,78%	-0,0000013	-1,33%	3,84%	-0,02%
C 37	4,10%	0,000171	1,31%	0,0000003	0,33%	0,08%	0,00%
C 38	6,70%	0,000003	0,18%	-0,0000016	-1,67%	15,14%	-0,02%
C 39	6,47%	0,000021	0,46%	-0,0000001	-0,06%	5,37%	-0,45%
C 40	6,66%	0,001673	4,09%	-0,0000019	-2,00%	0,65%	-0,01%

**Figura 1.** Rendimientos esperados cartera de inversiones empresa V periodo 2023.



Para identificar las carteras con mayor rendimiento combinado con buenos resultados en los índices de Sharpe y Treynor, es esencial buscar aquellas carteras que ofrezcan un equilibrio entre un rendimiento sólido y un riesgo controlado. La Cartera C23 muestra un rendimiento esperado relativamente alto del 7,61%; sin embargo, su índice de Sharpe es bajo (-32,40%) y su índice de Treynor es positivo, pero bajo (1,85%), lo que indica un riesgo ajustado al rendimiento es desfavorable.

Por otro lado, la Cartera C19 tiene un rendimiento esperado del 7,42%, pero tanto su índice de Sharpe como su índice de Treynor son subóptimos, con valores negativos (-0,13% y 8,73% respectivamente), lo que sugiere un rendimiento insuficiente para el riesgo asumido. En contraste, la Cartera C1 presenta un rendimiento esperado del 6,89%, acompañado de un índice de Sharpe alto (29,31%), lo que indica un buen rendimiento ajustado al riesgo. Aunque no se proporciona el índice de Treynor, su índice de Sharpe notable sugiere un buen equilibrio entre rendimiento y riesgo.

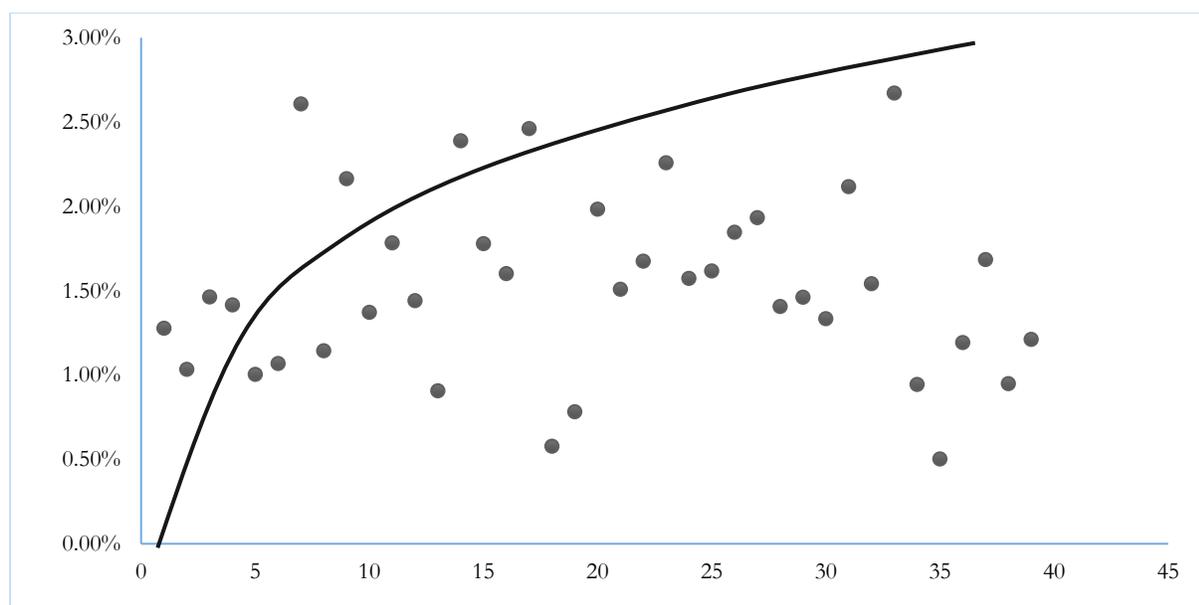
Similarmente, la Cartera C21, con un rendimiento esperado del 6,06%, muestra un índice de Sharpe positivo (25,33%), lo que sugiere un rendimiento ajustado al riesgo favorable. Aunque su índice de Treynor es negativo (-0,06%), su índice de Sharpe destacado indica que ofrece un buen rendimiento en relación con el riesgo. La Cartera C12 presenta un rendimiento esperado del 6,78% y un índice de Sharpe alto (13,70%), lo que sugiere un buen rendimiento ajustado al riesgo. Además, su índice de Treynor es positivo (0,12%), lo que refuerza su potencial de ofrecer beneficios en relación con el riesgo asumido.

**Tabla 2.** Resultado estadístico del portafolio de inversión de la empresa V del periodo 2019-2023.

Carteras	Rendimiento esperado	Varianza	Volatilidad	Covarianza	Beta	Sharpe	Treynor
C 1	1,28%	0,000017	0,41%			0,68%	
C 2	1,03%	0,000057	0,76%	0,000000	-0,02	0,04%	-1,44%
C 3	1,46%	0,000020	0,45%	0,000002	0,92	1,04%	0,50%
C 4	1,42%	0,000136	1,17%	-0,000001	-0,50	0,36%	-0,84%
C 5	1,00%	0,000129	1,13%	-0,000002	-1,27	0,00%	0,00%
C 6	1,07%	0,000021	0,46%	0,000000	0,02	0,15%	3,30%
C 7	2,61%	0,000027	0,52%	-0,000001	-0,46	3,12%	-3,49%
C 8	1,14%	0,000290	1,70%	-0,000003	-1,90	0,08%	-0,08%
C 9	2,16%	0,000563	2,37%	-0,000007	-4,42	0,49%	-0,26%
C 10	1,37%	0,000171	1,31%	-0,000001	-0,71	0,28%	-0,52%
C 11	1,78%	0,000102	1,01%	0,000001	0,61	0,77%	1,28%
C 12	1,44%	0,000083	0,91%	0,000004	2,20	0,48%	0,20%
C 13	0,91%	0,000156	1,25%	0,000000	0,09	-0,07%	-1,02%
C 14	2,39%	0,000005	0,23%	0,000000	0,27	5,98%	5,21%
C 15	1,78%	0,000103	1,02%	0,000001	0,88	0,77%	0,89%
C 16	1,60%	0,000094	0,97%	0,000000	-0,11	0,62%	-5,46%
C 17	2,46%	0,000030	0,55%	0,000001	0,52	2,65%	2,81%
C 18	0,58%	0,000167	1,29%	0,000004	2,39	-0,33%	-0,18%
C 19	0,78%	0,000115	1,07%	0,000001	0,72	-0,20%	-0,30%
C 20	1,98%	0,000018	0,42%	0,000000	-0,26	2,32%	-3,73%
C 21	1,51%	0,000077	0,88%	0,000001	0,71	0,58%	0,71%
C 22	1,67%	0,000002	0,16%	0,000000	0,05	4,27%	12,98%
C 23	2,26%	0,000029	0,54%	0,000000	-0,08	2,32%	-15,98%
C 24	1,57%	0,000025	0,50%	0,000000	-0,22	1,14%	-2,61%
C 25	1,62%	0,000028	0,53%	0,000002	1,18	1,16%	0,52%
C 26	1,85%	0,000040	0,63%	0,000002	1,37	1,34%	0,62%
C 27	1,93%	0,000027	0,52%	0,000000	0,14	1,80%	6,45%
C 28	1,41%	0,000065	0,81%	0,000001	0,53	0,50%	0,77%
C 29	1,46%	0,000033	0,57%	0,000000	-0,23	0,81%	-2,00%
C 30	1,33%	0,000005	0,21%	0,000000	0,21	1,58%	1,58%
C 31	2,12%	0,000020	0,45%	0,000001	0,63	2,50%	1,77%
C 32	1,54%	0,000008	0,28%	0,000001	0,42	1,96%	1,28%
C 33	2,67%	0,000116	1,08%	0,000001	0,42	1,55%	3,93%

Carteras	Rendimiento esperado	Varianza	Volatilidad	Covarianza	Beta	Sharpe	Treynor
C 34	0,94%	0,000445	2,11%	0,00004	2,23	-0,03%	-0,03%
C 35	0,50%	0,000022	0,47%	0,00000	-0,23	-1,06%	2,15%
C 36	1,19%	0,000268	1,64%	0,00000	0,25	0,12%	0,76%
C 37	1,68%	0,000004	0,21%	0,00000	0,24	3,24%	2,81%
C 38	0,95%	0,000451	2,12%	-0,00004	-2,11	-0,02%	0,02%
C 39	1,21%	0,000734	2,71%	0,00005	2,87	0,08%	0,07%

**Figura 2.** Rendimientos esperados cartera de inversiones empresa V Periodo 2015- 2019.



La Cartera C14 se destaca con un rendimiento esperado del 2,39%, la varianza más baja (0,000005), y una volatilidad del 0,23%, lo que indica un bajo nivel de riesgo en comparación con su rendimiento potencial. Además, presenta un índice de Sharpe elevado del 5,98% y un índice de Treynor positivo del 5,21%, lo que sugiere un rendimiento sólido ajustado al riesgo sistémico.

Otra cartera a considerar es la Cartera C22, que tiene un rendimiento esperado del 1,67%, una volatilidad del 0,16%, y una baja varianza (0,000002), lo que sugiere un riesgo relativamente bajo. Además, cuenta con un índice de Sharpe del 4,27% y un índice de Treynor significativamente alto del 12,98%, lo que indica un rendimiento ajustado al riesgo favorable y una buena relación con el mercado.

Además, la Cartera C27 también muestra resultados prometedores, con un rendimiento esperado del 1,93%, una volatilidad del 0,52%, y una varianza relativamente baja (0,000027). Su índice de Sharpe es del 1,80% y su índice de Treynor es del 6,45%, lo que sugiere un rendimiento ajustado al riesgo positivo y una buena capacidad para capturar el rendimiento del mercado.

Estas tres carteras destacan por ofrecer un rendimiento esperado sólido junto con índices de Sharpe y Treynor positivos y elevados, lo que sugiere un buen equilibrio entre rendimiento y riesgo ajustado. Sin embargo, es importante considerar otros factores y realizar un análisis exhaustivo antes de tomar decisiones de inversión.

**Tabla 3.** Resultado modelo optimización de cartera de Markowitz.

<b>Carteras</b>	<b>Rendimiento promedio esperado</b>	<b>Riesgo</b>	<b>Rendimiento optimo</b>
C 1	5,78%	0,28%	2,06%
C 2	6,51%	0,28%	1,42%
C 3	5,29%	0,32%	2,49%
C 4	5,00%	0,85%	2,75%
C 5	6,27%	0,63%	1,63%
C 6	6,42%	0,38%	1,49%
C 7	6,71%	0,42%	1,24%
C 8	6,46%	0,56%	1,46%
C 9	5,45%	0,25%	2,35%
C 10	5,24%	0,16%	2,53%
C 11	6,73%	0,20%	1,22%
C 12	5,48%	0,40%	2,33%
C 13	5,35%	0,32%	2,44%
C 14	5,78%	0,20%	2,06%
C 15	6,10%	0,35%	1,78%
C 16	6,45%	0,96%	1,47%
C 17	3,94%	1,65%	3,67%
C 18	7,40%	0,43%	0,64%
C 19	6,06%	0,20%	1,81%
C 20	6,06%	0,09%	1,81%
C 21	5,98%	0,05%	1,89%
C 22	7,77%	7,29%	0,31%
C 23	5,65%	0,30%	2,17%
C 24	5,67%	0,43%	2,16%
C 25	6,00%	0,36%	1,86%
C 26	5,97%	0,31%	1,89%
C 27	6,30%	0,35%	1,60%
C 28	5,31%	0,32%	2,48%
C 29	5,57%	0,36%	2,24%
C 30	6,22%	0,11%	1,67%
C 31	5,64%	0,23%	2,19%
C 32	5,76%	0,14%	2,08%
C 33	7,15%	0,67%	0,85%

Carteras	Rendimiento promedio esperado	Riesgo	Rendimiento óptimo
C 34	7,83%	0,55%	0,26%
C 35	6,30%	0,45%	1,60%
C 36	6,96%	0,85%	1,02%
C 37	4,46%	0,22%	3,22%
C 38	4,30%	0,86%	3,36%
C 39	6,45%	0,50%	1,47%

**Tabla 4.** Resultado portafolio optimo Markowitz.

Portafolio	
RE (P)	6,00%
Var (P)	0,3437%
RI(P)	5,8624%

El portafolio óptimo de Markowitz tiene un rendimiento esperado del 6,00% con una varianza del 0,3437%. Esto implica que se espera obtener un retorno del 6,00% en promedio, pero con un nivel de riesgo asociado del 0,3437%. El Rendimiento Informado del portafolio es del 5,8624%, lo que sugiere que el portafolio está generando un rendimiento ajustado al riesgo eficiente.

### Modelo Black Litterman

La Tabla 5 muestra los resultados del cálculo de omega, que representa la incertidumbre asociada a las opiniones de los expertos o, en otras palabras, la incertidumbre en las estimaciones de los excesos de rendimiento de un activo sobre otro. La covarianza negativa entre las opiniones de los expertos sugiere una posible discrepancia en las expectativas entre los activos correspondientes, lo que refleja la incertidumbre inherente al proceso de estimación de las vistas de los inversionistas en el modelo Black-Litterman.

**Tabla 5.** Resultado cálculo de omega (incertidumbre asociada a las opiniones de expertos).

Omega (incertidumbre asociada a los views)	
0,009840626	-0,00029466
-0,000335439	0,0005528

### Excedente de rendimiento implícito

Se ha presentado los elementos fundamentales del modelo Black Litterman,  $\Pi$  (cartera de mercado) y  $Q$  (supuestos). Posteriormente se procede a calcular los rendimientos esperados. El rendimiento esperado del modelo Black-Litterman (cartera de mercado y vistas promedio ponderadas) que mide la confianza en la cartera de mercado y en las vistas  $Q$ , es la siguiente:

**Tabla 6.** Excedente de rendimiento implícito.

Cartera	Rendimiento Esperado	Excedente de Rendimiento implícito	Tasa libre de riesgo	Sharper	Volat	Rendimiento planificado
C 1	0,48%	0,49%	0,25%	21,13	0,30	5,83%
C 2	-0,58%	-0,50%	0,25%	20,00	0,27	6,48%
C 3	0,38%	0,55%	0,25%	19,77	0,38	5,37%

Cartera	Rendimiento Esperado	Excedente de Rendimiento implícito	Tasa libre de riesgo	Sharper	Volat	Rendimiento planificado
C 4	-0,26%	-0,04%	0,25%	17,28	1,02	5,21%
C 5	-0,04%	0,00%	0,25%	20,79	0,59	6,21%
C 6	-0,42%	-0,37%	0,25%	20,08	0,37	6,38%
C 7	0,30%	0,32%	0,25%	23,66	0,41	6,76%
C 8	0,10%	0,09%	0,25%	21,98	0,51	6,48%
C 9	0,35%	0,39%	0,25%	19,67	0,26	5,49%
C 10	0,34%	0,36%	0,25%	18,81	0,16	5,27%
C 11	0,39%	0,44%	0,25%	24,14	0,22	6,78%
C 12	0,47%	0,48%	0,25%	19,86	0,37	5,46%
C 13	-0,01%	0,05%	0,25%	18,08	0,29	5,36%
C 14	0,16%	0,20%	0,25%	20,07	0,19	5,80%
C 15	-0,31%	-0,27%	0,25%	19,40	0,33	6,07%
C 16	0,41%	0,49%	0,25%	23,41	0,89	6,51%
C 17	4,28%	4,48%	0,25%	28,20	1,50	3,95%
C 18	0,19%	0,18%	0,25%	25,42	0,39	7,42%
C 19	-0,02%	0,02%	0,25%	20,38	0,19	6,08%
C 20	0,03%	0,04%	0,25%	20,40	0,08	6,06%
C 21	-1,09%	-0,08%	0,25%	19,73	0,05	5,98%
C 22	-1,11%	-0,06%	0,25%	25,25	6,61	7,61%
C 23	0,44%	0,41%	0,25%	20,20	0,28	5,63%
C 24	1,41%	1,49%	0,25%	24,25	0,49	5,76%
C 25	0,67%	0,72%	0,25%	22,49	0,32	6,00%
C 26	0,08%	0,15%	0,25%	20,55	0,29	6,00%
C 27	0,17%	0,18%	0,25%	21,74	0,32	6,32%
C 28	0,70%	0,73%	0,25%	20,37	0,34	5,36%
C 29	0,76%	0,85%	0,25%	21,74	0,42	5,65%
C 30	0,17%	0,17%	0,25%	21,37	0,10	6,22%
C 31	0,96%	1,04%	0,25%	22,58	0,32	5,71%
C 32	0,12%	0,14%	0,25%	19,79	0,14	5,78%
C 33	-1,38%	-1,50%	0,25%	18,39	0,77	7,00%
C 34	-0,02%	-0,04%	0,25%	26,09	0,50	7,84%
C 35	-0,09%	-0,05%	0,25%	20,90	0,41	6,30%
C 36	0,48%	0,49%	0,25%	25,09	0,78	7,01%

Cartera	Rendimiento Esperado	Excedente de Rendimiento implícito	Tasa libre de riesgo	Sharpe	Volat	Rendimiento planificado
<b>C 37</b>	0,17%	0,15%	0,25%	15,47	0,20	4,48%
<b>C 38</b>	-0,10%	-0,05%	0,25%	14,21	0,78	4,30%
<b>C 39</b>	0,30%	0,28%	0,25%	22,58	0,46	6,47%

La Tabla 6 detalla el excedente de rendimiento implícito para cada cartera en relación con la tasa libre de riesgo, junto con otros indicadores clave como el índice de Sharpe, la volatilidad y el rendimiento planificado. Aquí hay un análisis detallado. En su mayoría, las carteras muestran un excedente de rendimiento implícito positivo en comparación con la tasa libre de riesgo, lo que sugiere que se espera que generen rendimientos superiores al rendimiento sin riesgo.

Se observa una tendencia en la que las carteras con un índice de Sharpe más alto tienden a tener un excedente de rendimiento implícito más alto, indicando una mejor relación riesgo-recompensa. Aunque las carteras con volatilidades más bajas pueden ofrecer un excedente de rendimiento implícito más bajo, también pueden presentar un riesgo menor. Es necesario tener en cuenta que el rendimiento planificado puede variar del rendimiento esperado debido a los diferentes modelos o enfoques utilizados en el análisis.

**Tabla 7.** Rendimiento de cartera optimizado.

Carteras	Rendimiento esperado histórico	B-L Óptimo
<b>C 1</b>	0,48%	1,06%
<b>C 2</b>	-0,58%	0,00%
<b>C 3</b>	0,38%	0,00%
<b>C 4</b>	-0,26%	0,00%
<b>C 5</b>	-0,04%	0,00%
<b>C 6</b>	-0,42%	0,00%
<b>C 7</b>	0,30%	0,54%
<b>C 8</b>	0,10%	4,71%
<b>C 9</b>	0,35%	0,00%
<b>C 10</b>	0,34%	0,00%
<b>C 11</b>	0,39%	0,00%
<b>C 12</b>	0,47%	2,14%
<b>C 13</b>	-0,01%	0,00%
<b>C 14</b>	0,16%	0,00%
<b>C 15</b>	-0,31%	3,94%
<b>C 16</b>	0,41%	0,00%
<b>C 17</b>	4,28%	2,37%
<b>C 18</b>	0,19%	0,00%
<b>C 19</b>	-0,02%	0,00%
<b>C 20</b>	0,03%	0,00%

<b>Carteras</b>	<b>Rendimiento esperado histórico</b>	<b>B-L Óptimo</b>
<b>C 21</b>	-1,09%	0,00%
<b>C 22</b>	-1,11%	0,00%
<b>C 23</b>	0,44%	0,54%
<b>C 24</b>	1,41%	7,82%
<b>C 25</b>	0,67%	5,85%
<b>C 26</b>	0,08%	0,00%
<b>C 27</b>	0,17%	0,00%
<b>C 28</b>	0,70%	0,00%
<b>C 29</b>	0,76%	0,00%
<b>C 30</b>	0,17%	0,00%
<b>C 31</b>	0,96%	0,00%
<b>C 32</b>	0,12%	52,02%
<b>C 33</b>	-1,38%	0,00%
<b>C 34</b>	-0,02%	6,47%
<b>C 35</b>	-0,09%	0,00%
<b>C 36</b>	0,48%	3,97%
<b>C 37</b>	0,17%	6,27%
<b>C 38</b>	-0,10%	0,00%
<b>C 39</b>	0,30%	1,72%
<b>C 40</b>	-2,52%	0,00%

Para identificar las mejores carteras, se debe considerar tanto el rendimiento esperado histórico como el factor B-L óptimo. En ese sentido, algunas de las carteras más prometedoras son las siguientes. La Cartera C24 destaca por su rendimiento esperado histórico del 1,41% y un factor B-L óptimo del 7,82%. Este rendimiento sólido en el pasado sugiere un potencial para obtener altos rendimientos en el futuro, respaldado por su fuerte sensibilidad al mercado.

Asimismo, la Cartera C25 muestra un rendimiento esperado histórico del 0,67% y un factor B-L óptimo del 5,85%, colocándola entre las mejores opciones en términos de rendimiento pasado y sensibilidad al mercado. Este historial positivo sugiere la capacidad de la cartera para generar rendimientos atractivos en contextos de mercado dinámicos. A pesar de tener un rendimiento esperado histórico relativamente alto del 4,28%, la Cartera C17 muestra un factor B-L óptimo del 2,37%, indicando una relación menos sensible con el mercado. Sin embargo, sigue siendo una de las mejores opciones en términos de rendimiento pasado, lo que la posiciona como una alternativa sólida para inversión.

La Cartera C37 exhibe un rendimiento esperado histórico del 0,17% y un factor B-L óptimo del 6,27%. Aunque su rendimiento pasado es modesto, su fuerte sensibilidad al mercado sugiere un potencial significativo para obtener rendimientos futuros atractivos. Estas carteras destacan por su historial positivo de rendimiento y su capacidad para capitalizar movimientos del mercado, lo que las convierte en opciones atractivas para inversión.

**Tabla 8.** Rendimiento óptimo portafolio modelo Black Litterman.

Retorno del Portafolio (B-L)	0,39%
Varianza P	0,06%
Sharper ratio	16,14%

Los resultados del rendimiento óptimo del portafolio utilizando el modelo Black-Litterman muestran un rendimiento esperado del 0,39%, una varianza del portafolio del 0,06% y un índice de Sharpe del 16,14%. Estos resultados indican un rendimiento atractivo en comparación con el riesgo asumido, lo que sugiere que el modelo Black-Litterman ha identificado un portafolio eficiente y bien equilibrado.

**Tabla 9.** Tabla comparativa rendimiento históricos esperados, optimización de rendimiento modelo Black Litterman, modelo Markowitz.

Cartera	Rendimiento esperado	B-L 04	Markowitz
C 1	0,48%	1,06%	2,06%
C 2	-0,58%	0,00%	1,42%
C 3	0,38%	0,00%	2,49%
C 4	-0,26%	0,00%	2,75%
C 5	-0,04%	0,00%	1,63%
C 6	-0,42%	0,00%	1,49%
C 7	0,30%	0,54%	1,24%
C 8	0,10%	4,71%	1,46%
C 9	0,35%	0,00%	2,35%
C 10	0,34%	0,00%	2,53%
C 11	0,39%	0,00%	1,22%
C 12	0,47%	2,14%	2,33%
C 13	-0,01%	0,00%	2,44%
C 14	0,16%	0,00%	2,06%
C 15	-0,31%	3,94%	1,78%
C 16	0,41%	0,00%	1,47%
C 17	4,28%	2,37%	3,67%
C 18	0,19%	0,00%	0,64%
C 19	-0,02%	0,00%	1,81%
C 20	0,03%	0,00%	1,81%
C 21	-1,09%	0,00%	1,89%
C 22	-1,11%	0,00%	0,31%
C 23	0,44%	0,54%	2,17%
C 24	1,41%	7,82%	2,16%
C 25	0,67%	5,85%	1,86%

<b>Cartera</b>	<b>Rendimiento esperado</b>	<b>B-L 04</b>	<b>Markowitz</b>
<b>C 26</b>	0,08%	0,00%	1,89%
<b>C 27</b>	0,17%	0,00%	1,60%
<b>C 28</b>	0,70%	0,00%	2,48%
<b>C 29</b>	0,76%	0,00%	2,24%
<b>C 30</b>	0,17%	0,00%	1,67%
<b>C 31</b>	0,96%	0,00%	2,19%
<b>C 32</b>	0,12%	52,02%	2,08%
<b>C 33</b>	-1,38%	0,00%	0,85%
<b>C 34</b>	-0,02%	6,47%	0,26%
<b>C 35</b>	-0,09%	0,00%	1,60%
<b>C 36</b>	0,48%	3,97%	1,02%
<b>C 37</b>	0,17%	6,27%	3,22%
<b>C 38</b>	-0,10%	0,00%	3,36%
<b>C 39</b>	0,30%	1,72%	1,47%
<b>C 40</b>	-2,52%	0,00%	1,13%

La Tabla 9 ofrece una comparación detallada entre los rendimientos esperados históricos y los rendimientos optimizados mediante los modelos Black-Litterman y de Markowitz para diversas carteras. Al considerar los rendimientos esperados frente a los rendimientos optimizados, se observa una amplia variación en los rendimientos esperados históricos para las distintas carteras. Por otro lado, tanto el modelo Black-Litterman como el modelo de Markowitz generan rendimientos optimizados que tienden a ser más consistentemente positivos para la mayoría de las carteras. Esto sugiere que los modelos de optimización pueden mejorar significativamente los rendimientos esperados de las carteras en comparación con sus rendimientos históricos.

Sin embargo, al analizar las diferencias entre los modelos de optimización, se observan discrepancias notables en los rendimientos optimizados para ciertas carteras. Por ejemplo, las carteras C8, C12, C24 y C37 exhiben rendimientos optimizados considerablemente más altos según el modelo Black-Litterman en comparación con el modelo de Markowitz. Estas discrepancias indican que los modelos pueden tener sesgos o consideraciones diferentes al determinar los rendimientos óptimos de las carteras.

Otro punto importante para considerar es el impacto del rendimiento histórico en la optimización. Se destaca que, para algunas carteras, el rendimiento histórico tiene poco o ningún impacto en los rendimientos optimizados según los modelos. Por ejemplo, las carteras C2, C3, C4, C5, C6, C9, C10, C11, C13, C14, C16, C18, C19, C20, C21, C22, C25, C26, C27, C28, C29, C30, C31, C33, C35 y C38 muestran rendimientos optimizados del 0% en ambos modelos, a pesar de tener diferentes rendimientos históricos. Esto sugiere que los modelos de optimización pueden tener en cuenta otros factores además del rendimiento histórico al determinar los rendimientos óptimos de las carteras.

La comparación entre los rendimientos esperados históricos y los rendimientos optimizados mediante los modelos Black-Litterman y de Markowitz ilustra la capacidad de estos modelos para mejorar los rendimientos de las carteras. No obstante, es fundamental considerar otros aspectos, como el riesgo y las condiciones del mercado, al interpretar estos resultados.

## Discusión

La optimización de portafolios utilizando los modelos de Markowitz y Black-Litterman ha proporcionado un conjunto diverso de resultados que revelan implicaciones significativas para la gestión de inversiones. La integración de estos modelos busca combinar la eficiencia en la diversificación que caracteriza al modelo de Markowitz con la incorporación de expectativas razonables del modelo Black-Litterman, ofreciendo robustez especialmente necesaria en mercados volátiles o inciertos.

El modelo de Markowitz, centrado en la minimización de la varianza, ha sido consistentemente efectivo en la construcción de portafolios de mínima volatilidad según la literatura. Investigaciones como la de Sánchez y Prudencio (2023) aplicaron técnicas similares de optimización cuadrática, encontrando que portafolios bien diversificados pueden reducir significativamente el riesgo sin comprometer retornos excesivos. Los resultados presentados reflejan una similitud donde los portafolios con menor volatilidad, como la Cartera C12, mostraron rendimientos ajustados al riesgo competitivos.

La aplicación del modelo Black-Litterman ha permitido ajustar los retornos esperados para reflejar las ‘vistas’ específicas de los inversores con respecto a diferentes activos o mercados. En comparación con el estudio de Chen y Lim (2020) que destacó la capacidad del modelo para reflejar mejor las expectativas y opiniones de los inversores, los resultados actuales son consistentes, mostrando mejoras significativas en el rendimiento esperado de carteras como la C24 y C32 mediante la incorporación de vistas.

En cuanto a los índices de rendimiento ajustado al riesgo, tales como el ratio de Sharpe y el ratio de Treynor, se observó que los portafolios optimizados presentaron mejoras notables en comparación con los portafolios no optimizados. Investigaciones previas por Fama y French (1992) también concluyeron que las estrategias de inversión que utilizan modelos de optimización tienden a exhibir mayores ratios de Sharpe, reforzando la percepción de eficacia de estos métodos. Ejemplos notables incluyen la Cartera C1 y C21, que mostraron índices de Sharpe superiores, indicativos de una gestión de riesgo eficiente en relación con el rendimiento (Aird, 2020).

Aunque los modelos de Markowitz y Black-Litterman son ampliamente utilizados, no están exentos de limitaciones. La sensibilidad a las estimaciones de entrada, como los retornos esperados y las covarianzas, puede resultar en recomendaciones de portafolio que varían considerablemente con pequeñas modificaciones en dichas estimaciones. La literatura relevante, incluyendo estudios por Michaud (1989), ha criticado esta sensibilidad, proponiendo mejoras mediante técnicas de re-muestreo y optimización robusta para mitigar algunos de estos problemas.

Comparando con la literatura existente, los resultados actuales subrayan la utilidad de integrar perspectivas subjetivas en la gestión de portafolios, alineándose con el enfoque propuesto por Black y Litterman. Esta integración no solo mejora los retornos ajustados por el riesgo, sino que también proporciona una plataforma más adaptativa y sensible al entorno económico y a las expectativas del mercado.

Estos resultados confirman que la aplicación combinada de estos modelos puede ofrecer un marco más coherente y efectivo para la optimización de portafolios, especialmente en contextos de incertidumbre donde las decisiones informadas son cruciales. Continuar explorando y desarrollando estos modelos para superar sus limitaciones inherentes y mejorar su aplicabilidad práctica en la gestión de inversiones es fundamental.

## Conclusiones

Para integrar los modelos de Markowitz y Black-Litterman de manera que se utilice tanto información de mercado como perspectivas subjetivas eficientemente, se puede seguir un proceso secuencial o iterativo. Inicialmente, se puede utilizar el modelo de Black-Litterman para generar estimaciones iniciales de los retornos esperados de los activos, que incorporen tanto el equilibrio de mercado (por ejemplo, a partir de índices CAPM o el modelo de equilibrio de activos múltiples) como las vistas específicas (opiniones subjetivas) de los inversores sobre rendimientos futuros. Estos retornos ajustados son luego utilizados como entradas en el modelo de Markowitz para la selección y ponderación de activos en el portafolio final, minimizando la varianza o maximizando el ratio de Sharpe del portafolio resultante.

En contextos de mercados volátiles o bajo incertidumbre significativa, métodos robustos y adaptativos de estimación de retornos y covarianza se vuelven cruciales. Las técnicas como la estimación de Bayes, donde las previsiones se actualizan constantemente con nueva información, pueden ser particularmente efectivas. Además, el uso de modelos GARCH para prever la volatilidad y la covarianza puede ayudar a capturar la dinámica y la clustering de volatilidad típica de períodos de crisis. Integrar estos métodos dentro de los marcos de Markowitz y Black-Litterman puede ayudar a ajustar los portafolios a condiciones de mercado en rápida evolución y a manejar mejor el riesgo sistemático y específico.

El modelo de Black-Litterman permite a los inversores especificar no solo sus vistas, sino también su grado de confianza en estas vistas. Esta característica se manipula a través de la matriz de incertidumbre (Omega), que influye directamente en el ajuste de los retornos esperados. Portafolios construidos con un alto grado de confianza en las vistas pueden mostrar un rendimiento significativamente diferente de aquellos basados solo en datos históricos, como los derivados del modelo de Markowitz. En la práctica, aumentar la confianza en las vistas puede llevar a mayores desviaciones del portafolio de equilibrio del mercado y, potencialmente, a mayores retornos ajustados por riesgo, especialmente si las vistas del inversor son precisas.

Para adaptar los modelos de Markowitz y Black-Litterman a nuevas condiciones de mercado y emergencias económicas, como crisis financieras o cambios abruptos en políticas monetarias y fiscales, es fundamental incorporar flexibilidad y capacidad de actualización en tiempo real en las estimaciones de parámetros. Utilizar modelos económicos macrodinámicos para prever cambios en las covarianzas y los retornos esperados puede ser una estrategia efectiva. Además, la inclusión de estrategias de reversión a la media para las covarianzas y aplicar técnicas de decaimiento exponencial para dar más peso a las observaciones recientes puede mejorar la adaptabilidad del modelo.

## Referencias bibliográficas

- Aird, F. (2020). *Aplicación del modelo de tres factores de Fama French al mercado de valores de México*. Universidad de San Andrés. Escuela de Negocios. <http://repositorio.udesa.edu.ar/jspui/handle/10908/18023>
- Alban, G. P. G., Arguello, A. E. V., & Molina, N. E. C. (2020). Metodologías de investigación educativa (descriptivas, experimentales, participativas, y de investigación-acción). *Recimundo*, 4(3), Article 3. [https://doi.org/10.26820/recimundo/4.\(3\).julio.2020.163-173](https://doi.org/10.26820/recimundo/4.(3).julio.2020.163-173)
- Camargo, G. C. G., & Arteaga, V. A. A. (2022). El modelo de Markowitz para la selección de portafolios de inversión. *Perspectivas de la Ciencia y la Tecnología*, 5(9). <https://revistas.uaq.mx/index.php/perspectivas/article/view/925>
- Chaweewanchon, A., & Chaysiri, R. (2022). Markowitz mean-variance portfolio optimization with predictive stock selection using machine learning. *International Journal of Financial Studies*, 10(3), 64. <https://doi.org/10.3390/ijfs10030064>
- Chen, S. D., & Lim, A. E. (2020). A Generalized black-litterman model. *Operations research*, 68(2), 381–410. <https://doi.org/10.1287/opre.2019.1893>
- Franco, Y. A., Moreno, J. F., & Zapata, C. A. (2022). Selección óptima de portafolios usando el modelo Black-Litterman con views difusas. *Lecturas de Economía*, 97, 369–393. <https://doi.org/10.17533/udea.le.n97a346171>
- González, G. A. O. (2023). Comparación de los modelos de Black-Litterman, Markowitz y CAPM en la estimación de los rendimientos esperados en el mercado de renta variable en Colombia. *Revista Estrategia Organizacional*, 12(2), 29–53. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=9425239>
- Hernández, R., & Mendoza, C. (2020). *Metodología de la investigación: Las rutas cuantitativa, cualitativa y mixta*. McGraw-hill. <https://bit.ly/4e2JpoH>

- Ko, H., Son, B., & Lee, J. (2024). A novel integration of the Fama–French and Black–Litterman models to enhance portfolio management. *Journal of International Financial Markets, Institutions and Money*, *91*, 101949. <https://doi.org/10.1016/j.intfin.2024.101949>
- Lamela, R. V. Z. (2023). Gestión de cartera de inversión renta variable aplicando la Teoría de Portafolios de Markowitz. *SCIÉND0*, *26*(2), 205-213. <https://doi.org/10.17268/sciendo.2023.030>
- Llano, J. F. C., & Tovar, M. A. (2020). Construcción de portafolios en TES a partir de la aplicación de un modelo Black-Litterman. *Escenarios: empresa y territorio*, *9*(13), 85–114. <https://esumer.edu.co/revistas/index.php/escenarios/article/download/193/199>
- López, E. R., Mejía, J. F. G., & Garduño, Y. M. (2020). Diseño de un portafolio de inversión con algoritmos evolutivos. *Tecnología, Diseño e Innovación*, *6*(1), 51–70. <https://unae.edu.py/ojs/index.php/facat/article/view/261>
- Monroy, N., & Pérez, A. C. (2021). *Optimización de portafolios en renta variable, comparación Markowitz y Black Litterman*. <http://repository.cesa.edu.co/handle/10726/4181>
- Mourtas, S. D., & Katsikis, V. N. (2022). Exploiting the Black-Litterman framework through error-correction neural networks. *Neurocomputing*, *498*, 43–58. <https://doi.org/10.1016/j.neucom.2022.05.036>
- Murtadina, U. A., Saputro, D. R. S., & Utomo, P. H. (2021). *The application of Black-Litterman Bayesian model for the portfolio optimization on the liquid index 45 (LQ45) with information ratio assessment*. *2326*(1). <https://doi.org/10.1063/5.0039684>
- Panchi, M. P. (2021). La auditoría interna como herramienta de control y seguimiento de la gestión en las universidades. *Revista Universidad y Sociedad*, *13*(3), 333-341. <http://scielo.sld.cu/pdf/rus/v13n3/2218-3620-rus-13-03-333.pdf>
- Reyes, M. A., Orellana, I. F., & Tonon, L. B. (2023). Modelo de Valoración de Activos Financieros (CAPM) aplicado al sector empresarial de Ecuador. *RETOS. Revista de Ciencias de la Administración y Economía*, *13*(25), 123–136. <https://doi.org/10.17163/ret.n25.2023.08>
- Sánchez, A. V., & Prudencio, A. N. M. (2023). Optimización de carteras de renta variable con Machine Learning. *Revista Investigación & Desarrollo*, *23*(2), 23-45. <https://upb.edu/revista-investigacion-desarrollo/index.php/id/article/view/283>
- Shadabfar, M., & Cheng, L. (2020). Probabilistic approach for optimal portfolio selection using a hybrid Monte Carlo simulation and Markowitz model. *Alexandria engineering journal*, *59*(5), 3381–3393. <https://doi.org/10.1016/j.aej.2020.05.006>
- Subekti, R., & Rosadi, D. (2022). Toward the Black–Litterman with Shariah-compliant asset pricing model: A case study on the Indonesian stock market during the COVID-19 pandemic. *International Journal of Islamic and Middle Eastern Finance and Management*, *15*(6), 1150–1164. <https://doi.org/10.1108/IMEFM-12-2020-0633>
- Sun, Y., Wu, Y., & De, G. (2023). A Novel Black-Litterman Model with Time-Varying Covariance for Optimal Asset Allocation of Pension Funds. *Mathematics*, *11*(6), 1476. <https://doi.org/10.3390/math11061476>
- Villca, D. C. (2020). Modelo de Markowitz aplicado a fondos de inversión en Bolivia. *Revista Ñeque*, *3*(7), 176–189. <https://doi.org/10.33996/revistaneque.v3i7.40>